Formelsammlung - Algebra I

Zahlen

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$: Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Zahl Null
$\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen ($\mathbb{N}_0$ und die negativen Gegenzahlen zu $\mathbb{N}$)
$\mathbb{Z}^+$: Menge der natürlichen Zahlen ($\mathbb{Z}+ = \mathbb{N}$)
$\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen (Menge der Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen)
$\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen. Alle Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen, und solche, die sich nicht als Bruch darstellen lassen: rationale Zahlen und irrationale Zahlen
$\mathbb{R}^+$: Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^-$: Menge der negativen reellen Zahlen

Grundrechenarten

Addition:
$a + b = c$ (Summand + Summand = Summe)

Subtraktion:
$a - b = c$ (Minuend – Subtrahend = Differenz)

Multiplikation:
$a \cdot b = c$ (Faktor · Faktor = Produkt)

Division:
$a : b = c$ (Dividend : Divisor = Quotient)
$b \neq 0$

Rechengesetze

	Addition	Multiplikation
Kommutativgesetze:	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivgesetze:	$a \cdot (b + c)$ =	$a \cdot b + a \cdot c$

Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Eine natürliche Zahl ist

durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.
… durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
… durch 4 teilbar, wenn die Zahl, die durch ihre letzten beiden Ziffern dargestellt wird, durch 4 teilbar ist.
… durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 5 oder eine 0 ist.
… durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 **und** durch 3 teilbar ist.
… durch 7 teilbar, wenn man sie in Summanden zerlegen kann, die alle durch 7 teilbar sind.
… durch 8 teilbar, wenn die Zahl durch 2 geteilt wird **und** das Ergebnis durch 4 teilbar ist.
… durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Bruchrechnung

Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$; Kürzen: $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$

Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; Division: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Addition, Subtraktion: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

(Bem.: Brüche so erweitern, dass sie einen gemeinsamen Nenner haben und Zähler addieren bzw. subtrahieren)

Betrag

$|a|$ $+a$, wenn $a > 0$
$|a| =$ 0, wenn $a = 0$
$|a|$ $-a$, wenn $a < 0$

Zusammenhänge: Zwei Zahlen a, b unterscheiden sich um den Betrag $|a - b| = |b - a|$

Lineare Gleichungen, Funktionen

Lineare Gleichung: $ax + b = 0$;
x ist die Variable, und b, c sind Koeffizienten. Der Term ax heißt lineares Glied, und b ist das absolute Glied.

Lineare Funktion: $f(x) = ax + b$
speziell ($b = 0$), proportionale Funktion: $f(x) = ax$

Die Funktionsgraphen sind Geraden mit der Steigung a und schneiden die y-Achse im Punkt $P = (0, b)$.
b heißt auch Achsenabschnitt.

Lineare Gleichungssysteme

Werden gleichzeitig die Bedingungen von zwei oder mehr linearen Gleichungen verlangt, drückt man das mit einem linearen Gleichungssystem aus:

Lineares Gleichungssystem mit zwei Bedingungen:
$|a_1 x + b_1 y = c_1|$
$|a_2 x + b_2 y = c_2|$ x, y sind Variablen, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ Koeffizienten

Das System kann mit dem Additions-, Gleichsetzungs- oder Einsetzungsverfahren oder auch grafisch gelöst werden. Es hat entweder keine Lösung, eine bestimmte Lösung (x, y) oder eine Lösung der Form $y = ax + b$.

Lineares Gleichungssystem mit drei Bedingungen:
$|a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1|$
$|a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2|$ x, y, z sind Variablen;
$|a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3|$ $a_1, a_2 \dots d_2, d_3$ die Koeffizienten des Systems

Formelsammlung - Algebra II

Binomische Formeln

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$

allgemeine Lösung: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

Lösung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{((\frac{p}{2})^2 - q)}$

Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$

In Linearfaktoren: $(x - a)\ (x - b) = 0$

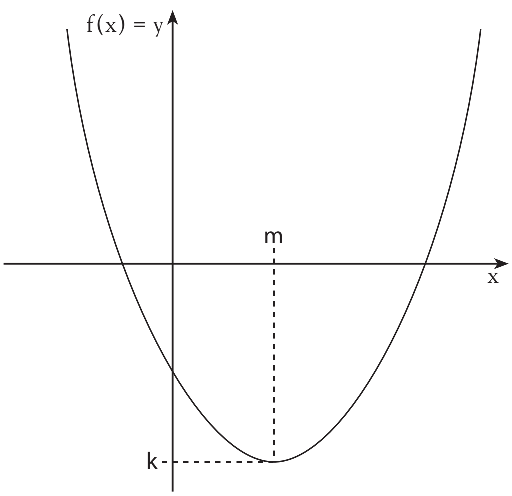
Lösung: $x_1 = a$, $x_2 = b$

Bem.: Eine quadratische Gleichung hat genau eine, zwei oder keine Lösung in $\mathbb{R}$, wenn der Wurzelterm größer ist als null, gleich null oder kleiner als null.

Quadratische Funktionen, Scheitelpunktform

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$

speziell: $f(x) = x^2$



Scheitelform: $f(x) = s\,(x - m)^2 + k$

Die Funktionsgraphen quadratischer Funktionen heißen Parabeln, die der speziellen Funktion $f(x) = x^2$ Normalparabel. Bei der Scheitelform ist s der Streckfaktor bezüglich der Normalparabel, und der Punkt P(m, k) ist der Scheitelpunkt.

Potenzen und Wurzeln

Definitionen

Potenz: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren a}}$

speziell: $a^1 = a$, $a^0 = 1$, $(a \neq 0)$

Wurzel:

$\sqrt[2]{a^2} = \sqrt{a^2} = |a|$;

$\sqrt[n]{x} = a \leftrightarrow a^n = x$; $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$

Zusammenhänge:

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$,

$a^n : a^p = a^{n-p}$,

$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$,

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$,

$a^n : b^n = (a:b)^n$,

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$,

$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$,

$a^{-\frac{p}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$

Logarithmen

Definition

$b^x = a \leftrightarrow \log_b a = x$; $a, b > 0$

speziell: $\log_b b = 1$; $\log_b 1 = 0$

Logarithmengesetze:

Erstes Logarithmengesetz

$\log (a \cdot b) = \log a + \log b$

$\log (a : b) = \log a - \log b$

Zweites Logarithmengesetz

$\log a^b = b \cdot \log a$

speziell: $\log \sqrt[a]{b} = \log b^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \log b$

Dekadischer Logarithmus:

$\log_{10} a = \lg a$

Natürlicher Logarithmus:

$\log_e a = \ln a$, mit der eulerschen Zahl $e = 2{,}718281828459 \ldots$

Zusammenhänge:

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \overset{\text{speziell}}{=} \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\lg a}{\lg b}$

$\log_b a \cdot \log_a b = 1$