Aufgaben zur e-Funktion:

5. In welchem Punkt des Graphen der Funktion $f: x \mapsto x + e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$ ist die Tangente parallel zur Geraden mit der Gleichung $x - 2y + 4 = 0$?

6. Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven mit den Gleichungen $y = e^{2x}$ und $y = e^{-2x};\ x \in \mathbb{R}$ (auf 0,01° genau)?

7. Gib $D_{f(x)}$ sowie $f'(x)$ an!

a) $f(x) = x \cdot e^x$
b) $f(x) = e^x \cdot \sin x$
c) $f(x) = e^x \cdot \ln x$
d) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$
e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
f) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$
g) $f(x) = e^{x^2+x}$
h) $f(x) = e^{\cos x}$
i) $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$
k) $f(x) = (2x-1)\,e^{-x}$
l) $f(x) = x^3 \cdot e^{\sin x}$
m) $f(x) = e^{-x}\sin 2x$
n) $f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{\ln(2x+1)}$
o) $f(x) = \dfrac{e^{\pi x}}{\sin \pi x}$
p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+e^{-x}}$
q) $f(x) = \ln(x^2 + e^{-x})$
r) $f(x) = \sin e^{2x}$
d) $f(x) = x\sqrt{x - e^{-x}}$

Lösungen:

5. Mit $f'(x) = 1 - e^{-x}$ und $y = \frac{1}{2}x + 2$ folgt mit $1 - e^{-x} = \frac{1}{2}$; $e^{-x} = \frac{1}{2}$ und damit $x = -\ln 0{,}5$, $y = f(-\ln 0{,}5) = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2}$. Der Punkt lautet $P\left(-\ln\frac{1}{2};\ \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2}\right)$.

6. Aus $e^{2x} = e^{-2x}$ folgt $x = 0$ und damit der Schnittpunkt $S(0; 1)$.

$f'(x) = 2e^{2x}$ und $f'(0) = 2$ mit $f(x) = e^{2x}$

$g'(x) = -2e^{-2x}$ und $g'(0) = -2$ mit $g(x) = e^{-2x}$

Die Winkel, die G_f bzw. G_g mit der x-Achse einschließen lauten $\alpha = 63{,}44°$ und $\beta = 116{,}57°$ und damit ist der Winkel zwischen G_f und G_g: $\gamma = |\alpha - \beta| = 53{,}13°$.

7. a) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = (1+x)e^x$.

b) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = (\sin x + \cos x)\,e^x$.

c) $D_f = \mathbb{R}^+$; $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)e^x$.

d) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

e) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$.

f) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$.

g) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$.

h) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$.

i) $D_f = [-1; \infty[$; $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$, $x \neq -1$.

k) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = (3-2x)e^{-x}$.

l) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = x^2 e^{\sin x}(3 + x\cos x)$.

m) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = (2\cos 2x - \sin 2x)\,e^{-x}$.

n) $D_f =]-\frac{1}{2}; \infty[\setminus\{0\}$; $f'(x) = \dfrac{2e^{2x+1}[(2x+1)\ln(2x+1) - 1]}{(2x+1)(\ln(2x+1))^2}$.

o) $D_f = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; $f'(x) = \dfrac{\pi e^{\pi x}[\sin \pi x - \cos \pi x]}{(\sin \pi x)^2}$.

p) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{x + e^{-x}[1 + x + x^2]}{\sqrt{1+x^2}\,(1+e^{-x})^2}$.

q) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}$.

r) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2e^{2x} \cdot \cos e^{2x}$.

s) $D_f = \{x \mid x \geqq e^{-x};\ x \in \mathbb{R}\}$; $f'(x) = \dfrac{3x + (x-2)e^{-x}}{2\sqrt{x - e^{-x}}}$, $x \neq e^{-x}$, $x \in D_f$.

Integrale zur e-Funktion:

6. Berechne folgende Integralwerte:

a) $\int_0^1 2 \cdot e^{2x} dx$ b) $\int_{-1}^0 3 \cdot e^{3x+1} dx$ c) $\int_{-1}^1 2x \cdot e^{x^2} dx$ d) $\int_0^{\pi/6} \cos x \cdot e^{\sin x} dx$

e) $\int_{-1}^2 e^{-x} dx$ f) $\int_0^{0,5} e^{1-4x} dx$ g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ h) $\int_1^e \frac{e^{1+3\ln x}}{x} dx$

Lösungen:

6. a) $\int_0^1 2e^{2x} dx = [e^{2x}]_0^1 = e^2 - 1.$ b) $\int_{-1}^0 3e^{3x+1} dx = [e^{3x+1}]_{-1}^0 = e - \frac{1}{e^2}.$

c) $\int_{-1}^1 2xe^{x^2} dx = [e^{x^2}]_{-1}^1 = 0.$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\, e^{\sin x} dx = [e^{\sin x}]_0^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{e} - 1.$

e) $\int_{-1}^2 e^{-x} dx = -[e^{-x}]_{-1}^2 = \frac{e^3 - 1}{e^2}.$ f) $\int_0^{0,5} e^{1-4x} dx = -\frac{1}{4}[e^{1-4x}]_0^{0,5} = \frac{e^2 - 1}{4e}.$

g) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2[e^{\sqrt{x}}]_1^4 = 2e(e-1).$

h) $\int_1^e \frac{e^{1+3\ln x}}{x} dx = \frac{1}{3}[e^{1+3\ln x}]_1^e = \frac{1}{3}[e^{1+3\ln e} - e^{1+3\ln 1}] = \frac{1}{3}[e^4 - e].$