# Aufgaben

7. Welchen Inhalt hat das von der Geraden mit der Gleichung $3x - 2y = 0$ und dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2;\ x \in \mathbb{R}$ begrenzte Flächenstück?

8. Die Parabeln mit den Gleichungen
   a) $x^2 = 6y$ bzw. $y^2 = 6x$  b) $x^2 = ay$ bzw. $y^2 = ax$
   umschließen ein Flächenstück, dessen Inhalt berechnet werden soll.
   *Hinweis:* Aus Symmetriegründen wird das Flächenstück von der Winkelhalbierenden des I. Quadranten halbiert.

9. Die Punkte $P_1(4; ?)$ und $P_2(-2; ?)$ liegen auf dem Graphen von $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}$. Berechne den Inhalt des vom Graphen und der Geraden $P_1P_2$ begrenzten Flächenstücks!

10. Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen $G_\varphi$ der Funktion $\varphi: x \mapsto -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1;\ x \in \mathbb{R}$, dem Lot vom Parabelscheitel auf die x-Achse, der x-Achse und der y-Achse eingeschlossen wird?

11. Für welche Werte von a gilt:
    a) $\int\limits_0^a (x+1)\,dx = 12$  b) $\int\limits_0^{\sqrt{a}} (x^3 - x)\,dx = 6$

19. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{8}(x-2)(x^2+2x+4);\ x \in \mathbb{R}$.
    a) Zeige, dass der Graph $G_f$ einen Terrassenpunkt besitzt und skizziere $G_f$ in einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm auf beiden Achsen.
    b) Ermittle die Gleichung der Tangente $T_1$ an $G_f$ im Punkt $P(-2; -2)$.
    [Ergebnis $t_1(x) = \frac{3}{2}x + 1$]
    c) Die Tangente $T_1$ schließt mit $G_f$ ein Flächenstück ein. Berechne den Inhalt dieses Flächenstücks.

# Lösungen

**7.** Bestimmung der Schnittstellen, die die Integrationsgrenzen werden: S

$3x - 2y = 0 \wedge y = \frac{1}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 3x \wedge 2y = x^2$

$\Rightarrow \quad x^2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 3$

$A = \int\limits_0^3 \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right] dx = \frac{3}{2}\int\limits_0^3 x\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 x^2\,dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3^3}{3} = \frac{9}{4}.$ (s. Fig. 7.21)

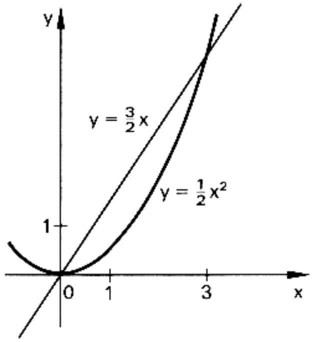

Fig. 7.21

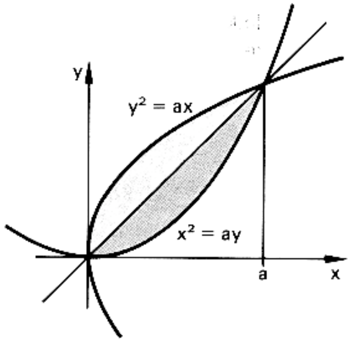

Fig. 7.22

**8.** Wir berechnen jeweils das von der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten mit der ersten Parabel eingeschlossene Flächenstück.

a) $y = \frac{1}{6}x^2 \wedge y = x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 6$

$\frac{A}{2} = \int\limits_0^6 \left[x - \frac{1}{6}x^2\right] dx = \frac{6^2}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{6^3}{3} = 6 \Rightarrow A = 12.$

b) $x_1 = 0, \quad x_2 = a$

$A = 2 \cdot \int\limits_0^a \left[x - \frac{1}{a}x^2\right] dx = 2 \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^2}{3}.$

s. Fig. 7.22

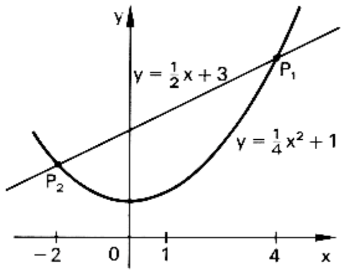

Fig. 7.23

**9.** $y_1 = f(4) = 5; \quad y_2 = f(-2) = 2$

$\Rightarrow \quad P_1P_2$: $y = \frac{1}{2}x + 3$

$\Rightarrow \quad A = \int\limits_{-2}^{4} [\frac{1}{2}x + 3 - (\frac{1}{4}x^2 + 1)]\,dx = \int\limits_{-2}^{4} (2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2)\,dx = 9.$

**10.** Um eine Skizze machen zu können, setzen wir nur die 1. Ableitung $\varphi'(x)$ gleich null und ermitteln den Scheitel-x-Wert:

$\varphi'(x) = -\frac{2}{3}x + 2 = 0 \Rightarrow x = 3.$

Dass es sich um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, ist uns bekannt. Ebenso ist uns klar, dass die y-Achse bei $y = 1$ geschnitten wird. Dies genügt für eine Skizze (Fig. 7.24).

$\Rightarrow \quad A = \int\limits_0^3 \varphi(x)\,dx = 9.$

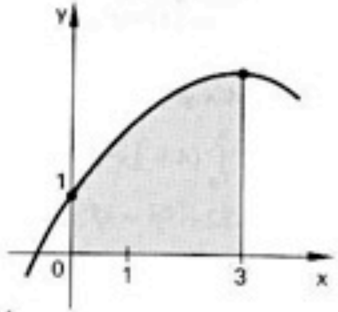

Fig. 7.24

**11.** a) $\frac{a^2}{2} + a = 12 \quad \Leftrightarrow \quad a = -6 \vee a = 4;$

b) $\frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a = -4 \vee a = 6.$

**19.** a) $f(x) = \frac{1}{8}(x-2)(x^2+2x+4) = \frac{1}{8}(x^3 - 8)$

$f'(x) = \frac{3}{8}x^2$

$f''(x) = \frac{3}{4}x$

$f'''(x) = \frac{3}{4}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(0) = 0 \wedge f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$

Terrassenpunkt $(0; -1)$ s. Fig. 7.29

b) $m = f'(-2) = \frac{3}{2}$

$y = mx + t$; mit $P(-2; -2)$:

$-2 = \frac{3}{2}(-2) + t \Rightarrow t = 1$

$\Rightarrow t_1(x) = \frac{3}{2}x + 1.$

c) Schnittpunkt von $G_f$ und $T_1$:

$t_1(x) = f(x) \Rightarrow x^3 - 12x - 16 = 0.$

Polynomdivision mit der bekannten Lösung $x_1 = -2$:

$(x^3 - 12x - 16) : (x + 2) = x^2 - 2x - 8$

weiter mit: $x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x_2 = -2;\ x_3 = 4$, also Schnittpunkt bei $x = 4$.

$A = \int\limits_{-2}^{4} [t_1(x) - f(x)]\,dx = \int\limits_{-2}^{4} (\frac{3}{2}x + 1 - \frac{1}{8}x^3 + 1)\,dx$

$= -\frac{1}{8}\int\limits_{-2}^{4} x^3 dx + \frac{3}{2}\int\limits_{-2}^{4} x\,dx + 2\int\limits_{-2}^{4} dx = 13\frac{1}{2}.$

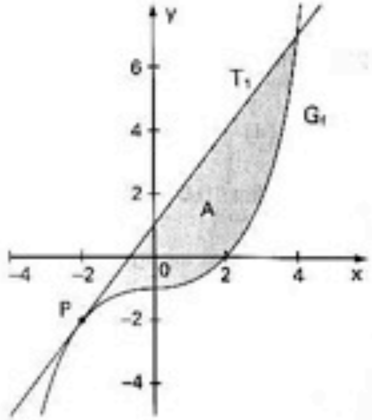

Fig. 7.29